



TITLE:

# $\alpha$ 連結成分問題の計算複雑さの上昇について(計算量理論)

AUTHOR(S):

岩本, 宙造; 岩間, 一雄

---

CITATION:

岩本, 宙造 ...[et al].  $\alpha$ 連結成分問題の計算複雑さの上昇について(計算量理論). 数理解析研究所講究録 1994, 871: 117-123

ISSUE DATE:

1994-05

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/84047>

RIGHT:

## $\alpha$ 連結成分問題の計算複雑さの上昇について

九州大学工学部 岩本 宙造 (Chuzo Iwamoto)  
九州大学工学部 岩間 一雄 (Kazuo Iwama)

### 1 はじめに

連結成分問題は代表的なグラフ問題の一つであり, [5] を初めとして幾つかのアルゴリズムが知られている. [5] のアルゴリズムは, “(極大でない) 連結成分  $U$  に対し,  $U$  に隣接する頂点  $v$  を  $U$  に吸収する” という手続きの繰り返しからなる. このアルゴリズムから分かるように, 連結成分問題は頂点と頂点集合間の連結の強さが全く反映されていない. その観点から, 連結成分問題の拡張として, 頂点  $v$  と集合  $U$  の間の隣接関係にパラメータを導入した  $\alpha$  連結成分問題が提案された [1].  $\alpha$  連結成分問題では,  $U$  が  $v$  を吸収するには,  $v$ - $U$  間に少なくとも  $\lceil d(v) \cdot \alpha / n \rceil$  本の枝の存在を必要とする. ただし,  $d(v)$  は, 頂点  $v$  の次数を表す. (例えば, 頂点数  $n = 100$  に対し  $\alpha = 10$  とする. このとき, 頂点  $v$  が  $U$  に吸収され得るのは,  $v$  の近傍頂点のうちの 10 分の 1 が  $U$  に含まれているときである.)  $\alpha = 1$  のとき,  $\alpha$  連結成分問題は一般の連結成分問題と同じである.

文献 [1] は, この  $\alpha$  連結成分問題を提案し, その並列計算複雑さについて考察した.  $\alpha$  連結成分問題の特徴は,  $\alpha$  の値を変化させることにより計算複雑さが徐々に上昇することにある. 以下の結果が知られている. (i)  $\alpha$  連結成分問題は, 多項式台数のプロセッサをもつ CRCW-PRAM で,  $O(\alpha^2 \log n)$  時間で解ける. (つまり,  $\alpha = c(\log n)^{\frac{t-2}{2}}$  のとき,  $NC^t$  に入る.) (ii)  $\alpha = cn^c$  のとき,  $\alpha$  連結成分問題は P 完全になる. (グラフの  $k$ -connectivity [4] も  $O(k^2 \log n)$  並列時間なる上限が知られているが,  $k$  の上昇に伴って最終的に P 完全まで難しくなるかどうかは分かっていない. しかし, P 完全にならないことを強く予想させる結果が知られている [3].)

$\alpha$  連結成分問題に関するこれらの結果は, (ii) で P 完全性を証明しているものの, (i) は計算複雑さの上限の上昇に関する結果に過ぎず,  $\alpha$  連結成分問題の計算複雑さが徐々に上昇していることの決定的な証拠が与えられていない. そこで, 我々は,  $\alpha$  連結成分問題の模倣能力を考察し, 計算複雑さが P 完全へ向けて徐々に上昇していることを示唆するより強い証拠を示すを試みる. 我々の得た結果を大雑把に言うと, 固定された大きさの  $\alpha$  連結成分問題は,  $\alpha$  の値が小さいとき多数の小さな回路を同時に模倣でき,  $\alpha$  の値が大きくなるに従って徐々に (少数の) より大きな回路を模倣できるようになる. このことを示すため, 新たに  $p$  論理回路値問題 (collective  $p$ -circuit value problem,  $p$ -CCVP) を提案する.  $p$ -CCVP のインスタンスは, 個々のサイズが  $p$  である  $n/p$  個の回路からなり, 各回路の出力値を求める問題である. (例えば,  $p = \log n$  のときは,  $n/\log n$  個の出力値を求める.) 本稿では,  $p = \lfloor (\alpha - 2)/9 \rfloor$  のとき,  $p$ -CCVP は対数領域で  $\alpha$  連結成分問題に帰着可能であることを述べる. (帰着のオーバーヘッドはそれほど大きくない.  $n$  個のゲートをもつインスタンスは  $9\alpha n$  頂点のグラフに帰着される.) この結果から,  $\alpha$  が大きくなるに従って徐々に大きな (しかし少数の) 回路を模倣できるよう

になる性質があることが分かる。

$\alpha$  連結成分問題の計算複雑さの上昇に関するより強い証拠を示す方法の一つとして、 $\alpha = c(\log n)^{\frac{t-2}{2}}$  なる  $\alpha$  連結成分問題 ( $NC^t$  に入る) に  $O(\log^t n)$  段の回路を帰着するアプローチが考えられるが、帰着法は分かっていない。  $O(\log^{t/2} n)$  段の回路からの帰着でさえもかなり難しいように見える。

## 2 $\alpha$ 連結成分問題

$G = (V, E)$  を無向グラフとする。頂点  $v$  の次数を  $d(v)$  で表す。  $v_1$  を  $V$  に含まれる頂点とし、  $U \subseteq V$  を  $v_1$  を含んでいない頂点集合とする。“ $v_1$  が  $U$  に  $\alpha$  隣接する”というのは、少なくとも  $\lceil d(v_1) \cdot \alpha / n \rceil$  本の枝が  $v_1$ - $U$  間に存在するときである。また、  $U$  に  $\alpha$  隣接するような頂点が存在しないとき、“ $U$  は  $\alpha$  極大である”という。  $V$  から互いに素な集合  $V_1, V_2, \dots, V_k$  への分割  $\pi$  に対し、(i) 各  $V_i$  が  $\alpha$  極大でかつ、(ii)  $\pi$  より真に“細かい”分割が  $\alpha$  極大集合を含まないとき、“分割  $\pi$  は  $\alpha$  極大”であるという。

( $V$  から  $U_1, U_2, \dots, U_l$  への分割  $\pi'$  が  $\pi$  よりも“細かい”というのは、  $U_1, U_2, \dots, U_l$  が  $V_1, V_2, \dots, V_k$  を更に分解して得られるときである。例えば、  $\{\{1, 2\}, \{3\}, \{4, 5\}, \{6, 7\}, \{8\}\}$  は  $\{\{1, 2, 3\}, \{4, 5\}, \{6, 7, 8\}\}$  より細かい。) そのような  $V_1, V_2, \dots, V_k$  をそれぞれ  $\alpha$  連結成分と呼ぶ。  $\alpha$  連結成分問題は、  $\alpha$  連結成分を求める問題とする。(  $\alpha = 1$  のとき、  $\alpha$  連結成分問題は一般の知られている連結成分問題と一致する。 ) このように定義された  $\alpha$  連結成分問題に対し、以下の性質、定理が知られている。

性質 1 [1]. 如何なるグラフに対しても、  $\alpha$  連結成分は一意である。

性質 2 [1].  $\alpha$  連結成分は、以下の直列アルゴリズムで求まる。(i) 初期分割:  $U_1 = \{v_1\}, U_2 = \{v_2\}, \dots, U_n = \{v_n\}$ . (ii) 今、  $p$  個の集合  $U_1, U_2, \dots, U_p$  が得られているとする。  $U_i$  に  $\alpha$  隣接する  $v$  を見つけ、  $v \in U_j$  なる  $U_j$  と  $U_i$  をマージする。(iii) (ii) を繰り返す。

定理 1 [1].  $\alpha$  連結成分問題は、多項式台数のプロセッサをもつ CRCW-PRAM により、  $O(\alpha^2 \log n)$  時間で解ける。

プロセッサ数が多項式の CRCW-PRAM で  $O(\log^t n)$  時間で解ける問題は、クラス  $NC^{t+1}$  に入ることが知られている [2]. 故に、定理 1 から、  $\alpha = c(\log n)^{\frac{t-2}{2}}$  のとき  $\alpha$  連結成分問題は、クラス  $NC^t$  に入ることが分かる。

## 3 $\alpha$ 連結成分問題による $p$ -CCVP の模倣

本稿では、論理回路は、AND, OR, NOT ゲートからなるとし、出力ゲートは出力線数 0 とする。各ゲートへの入力は 0, 1, 又は上位レベルのゲートである。NOT ゲートは、最初の段にのみ現れるとする。(2 段目以下の NOT ゲートは、ゲートの数を倍にするだけで初段まで押し上げることが可能。)  $p$ -CCVP のインスタンスは、  $p$  個のゲートからなる回路が  $n/p$  個集まった  $\{C_1, C_2, \dots, C_{n/p}\}$  である。 $p$ -CCVP は、各回路  $C_l$  ( $1 \leq l \leq n/p$ ) の指定された出力ゲート (出力線数 0) の値を求める問題である。本稿では、[1] と同様、  $1 \leq \alpha < n^{1/2}$  とする。以下の定理は、  $\alpha = n^c$  における  $\alpha$  連結成分問題の P 完全性 [1] を特別な場合として含んでいる。

定理 2.  $\sigma$ -CCVP のインスタンスを  $C_1, C_2, \dots, C_{n/\sigma}$  (ただし、  $\sigma = \lfloor (\alpha - 2)/9 \rfloor$ ) とする。このとき、このインスタンスは、以下の条件を満たす  $\lceil 9\alpha n \rceil$  頂点のグラフ  $G$  に対数領域で帰着される。条件:

指定された頂点对  $(v_1, u_1), (v_2, u_2), \dots, (v_{n/\sigma}, u_{n/\sigma})$  に対し,  $C_i$  の出力が 1 のときに限り頂点对  $(v_i, u_i)$  は同じ  $\alpha$  連結成分に含まれる.

証明. 以下では,  $n$  はゲート数を表し, 帰着されたグラフの頂点数は  $m$  で表す. 証明の詳細を与える前に,  $\alpha$  連結成分問題の模倣能力について直感的に説明する. 頂点  $v$  は,  $u_1, u_2$  に隣接しているとす. このとき,  $\lceil d(v) \cdot \alpha / m \rceil = 2$  ならば,  $v$  は,  $\{u_1\}$  にも  $\{u_2\}$  にも  $\alpha$  隣接しない. しかし,  $u_1, u_2$  が同じ  $\alpha$  連結成分に含まれたとす.  $\lceil d(v) \cdot \alpha / m \rceil = 2$  より,  $v$  は,  $\{u_1, u_2\}$  に  $\alpha$  隣接し,  $v$  は  $\{u_1, u_2\}$  に吸収される. 新たにできた  $\{u_1, u_2, v\}$  は, それに  $\alpha$  隣接する頂点を吸収する. 以下同様の吸収が繰り返される. つまり, この吸収のプロセスで回路を模倣することになる. しかし, こういった吸収プロセスで模倣するためには, 次数  $d(v)$  がかなり大きくなくてはならない. 例えば,  $\alpha = \log m$  かつ  $d(v) \leq m / \log m$  とすると,  $\lceil d(v) \cdot \alpha / m \rceil = 1$  となる. つまり,  $v$  は  $\{u_1\}$  に  $\alpha$  隣接してしまい, 上記模倣は不可能になる. 以下での証明では, 各頂点の次数を如何にして大きくするかが鍵となる.

まず,  $C = \{C_1, C_2, \dots, C_{n/\sigma}\}$  とし, 各回路  $C_l$  (但し,  $1 \leq l \leq n/p$ ) は高々  $\sigma = \lfloor (\alpha - 2)/9 \rfloor$  ゲートからなるとす.  $C$  に含まれる  $n$  個のゲートを  $g_1, g_2, \dots, g_n$  で表す. ただし,  $C_1 = \{g_1, \dots, g_\sigma\}$ ,  $C_2 = \{g_{\sigma+1}, \dots, g_{2\sigma}\}, \dots$  とす. 各  $g_i$  は, (i)  $g_i = 1$ , (ii)  $g_i = 0$ , (iii)  $g_i = g_j \wedge g_k$  ( $j, k < i$ ), (iv)  $g_i = g_j \vee g_k$  ( $j, k < i$ ) のいずれかである. (NOT ゲートは初段のみに現れるので, 取り除くことが可能.) 各ゲートの入力線数と出力線数は, それぞれ高々 2 とす. また, 各回路  $C_l$  に対し入力線数 0 のゲートは入力ゲート, 出力線数 0 の ( $C_l$  中で唯一の) ゲートは出力ゲートとす. 簡単のため, 値 1 の入力ゲートは少なくとも一つは存在するとす. 以下では, このように定義されたインスタンス  $C$  を  $\alpha$  連結成分問題のインスタンス  $G$  に帰着する.

各ゲート  $g_i$  に対し, ゲートの種類に関わらず 9 頂点  $a_i^1, a_i^2, a_i^3, b_i^1, b_i^2, b_i^3, c_i^1, c_i^2, c_i^3$  を用意する (図 1 参照). これら 9 頂点を  $g_i$  頂点と呼ぶ.  $\{a_i^1, a_i^2, a_i^3\}$  と  $\{b_i^1, b_i^2, b_i^3\}$  の間を  $3 \times 3$  本の枝で完全二分グラフ状に結ぶ. 同様に,  $\{b_i^1, b_i^2, b_i^3\}$  と  $\{c_i^1, c_i^2, c_i^3\}$  の間も  $3 \times 3$  本の枝で結ぶ. 以上の操作によって得られたグラフを  $G^1$  と呼ぶ.

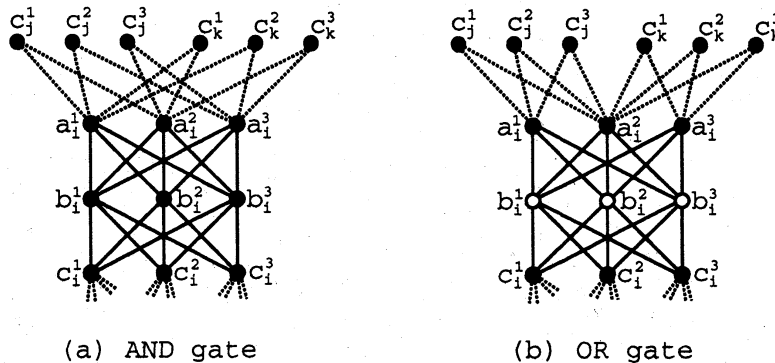


図 1

(i)  $g_i$  は AND ゲートとす (図 1-(a) 参照).  $g_i$  への入力が  $g_j, g_k$  により与えられるとき (つまり  $g_i = g_j \wedge g_k$ ), 以下の枝を加える.

$$(a_i^1, c_j^1), (a_i^1, c_k^1), (a_i^2, c_j^2), (a_i^2, c_k^2),$$

$$(a_i^2, c_j^1), (a_i^2, c_j^3), (a_i^2, c_k^1), (a_i^2, c_k^3), \\ (a_i^3, c_j^2), (a_i^3, c_j^3), (a_i^3, c_k^2), (a_i^3, c_k^3).$$

$g_i$  の入力線数が 1 のときは (つまり  $g_i = g_j$ ) ,  $\{c_j^1, c_j^2, c_j^3\}$  と  $\{a_i^1, a_i^2, a_i^3\}$  を完全 2 分グラフ状に結ぶ.

(ii)  $g_i$  は OR ゲートとする (図 1-(b) 参照) .  $g_i$  への入力  $g_j, g_k$  により与えられるとき (つまり  $g_i = g_j \vee g_k$ ) , 以下の枝を加える.

$$(a_i^1, c_j^1), (a_i^1, c_j^2), (a_i^1, c_j^3), \\ (a_i^2, c_j^1), (a_i^2, c_j^2), (a_i^2, c_j^3), (a_i^2, c_k^1), (a_i^2, c_k^2), (a_i^2, c_k^3), \\ (a_i^3, c_k^1), (a_i^3, c_k^2), (a_i^3, c_k^3).$$

以上の操作で得られるグラフを  $G^2$  とする.  $C$  は  $n/\sigma$  個の回路からなるので,  $G^2$  は  $n/\sigma$  個の成分からなる. 各回路  $C_l$  に対応する成分を  $C_l$  部分グラフと呼ぶ.  $G^2$  の各頂点を gate 頂点と呼ぶ.

次に, 大きさ  $\lceil 9n(\alpha-1) \rceil$  の完全グラフ  $K$  を用意する. ( $K$  を利用して各 gate 頂点  $v$  の次数を十分に大きくし,  $\lceil d(v) \cdot \alpha/m \rceil$  の値を 3 又は 2 にする.)  $K$  の大きさの理由は, 補題 1 で与える. 各  $i$  に対し, 以下の手続きを各 gate 頂点に適用する.

(i)  $g_i$  を AND ゲートとする (図 1-(a) 参照) . 各  $g_i$  頂点の次数が  $18n+2$  になるように以下の処理を行なう. まず,  $(18n-5)$  本の枝を  $K$  中の任意の  $(18n-5)$  頂点と  $a_i^1$  の間に張る.  $g_i$  の入力線数が 1 (0) のときは, さらに 1 本 (4 本) を  $a_i^1$  と  $K$  の間に加える. この処理により  $a_i^1$  の次数は  $18n+2$  になる. 全く同様にして  $a_i^2, a_i^3$  の各次数を  $18n+2$  にする. つぎに, 各  $p \in \{1, 2, 3\}$  に対し,  $K$  と  $b_i^p$  間に  $(18n-4)$  本の枝を張る. さらに,  $K$  と  $c_i^p$  の間に  $(18n-5)$  本の枝を加える. もし,  $g_i$  の出力線数が 1 (0) ならば,  $K$  と  $c_i^p$  の間に更に 1 本 (4 本) の枝を加える. 以上の操作により各  $g_i$  頂点の次数は,  $18n+2$  となる.

(ii)  $g_i$  を OR ゲートとする (図 1-(b) 参照) . 各  $p \in \{1, 2, 3\}$  に対し, (i) と同様の手法により,  $a_i^p, c_i^p$  ( $p \in \{1, 2, 3\}$ ) の各頂点の次数が  $18n+2$ ,  $b_i^p$  の次数が  $9n+1$  となるように枝を  $K$  との間に加える.

(iii)  $g_i$  を値 0 の入力ゲートとする (図 2-(a) 参照) . (i) と全く同様にして, 各  $g_i$  頂点の次数を  $18n+2$  にする. ( $g_i$  の入力線数は 0 であることに注意.)

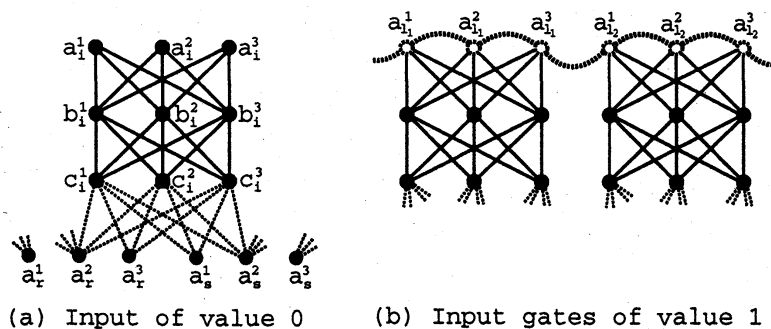


図 2

(iv)  $g_i$  を値 1 の入力ゲートとする (図 2-(b) 参照) . (ii) と同様にして,  $b_i^1, b_i^2, b_i^3, c_i^1, c_i^2, c_i^3$  の各次

数を  $18n + 2$  とする.  $g_{i_1}, g_{i_2}, \dots, g_{i_q}$  を回路  $C_l$  ( $1 \leq l \leq n/\sigma$ ) に属する値 0 の入力ゲートとする. 各  $C_l$  部分グラフに対し, 枝  $(a_{i_1}^1, a_{i_1}^2), (a_{i_1}^2, a_{i_1}^3), (a_{i_1}^3, b_{i_2}^1), (b_{i_2}^1, b_{i_2}^2), \dots, (a_{i_q}^3, b_{i_1}^1)$  を加える. (各  $p \in \{1, 2, 3\}, 1 \leq i \leq l_p$  に対し,  $a_{i_i}^p$  は,  $K$  中に近傍を持たず, 次数は 5 である.)

以上の操作により得られるグラフが目的の  $G$  である.  $g_{i_l}$  が  $C_l$  の出力ゲートであるような  $i_l$  に対し, 頂点对  $(u_l, v_l)$  として  $b_{i_l}^1$  と  $b_{i_l}^2$  を選ぶ. 容易に分かるように  $G$  及び  $(u_1, v_1), (u_2, v_2), \dots, (u_{n/\sigma}, v_{n/\sigma})$  は対数領域で構成できる.

以下では,  $u_l, v_l$  が同じ  $\alpha$  連結成分に含まれるときに限り, 対応する出力ゲート  $g_{i_l}$  が 1 になることを証明する.  $G$  は,  $9n$  個の gate 頂点と  $K$  に属す  $|9n(\alpha - 1)|$  個の頂点からなる.  $G$  から  $G'$  への上記の変換により, 多くの gate 頂点が  $K$  の一つの頂点に枝を張っていることも考えられる. 故に,  $K$  中の頂点の一つでも gate 頂点と同じ  $\alpha$  連結成分に含まれてしまうと,  $K$  や gate 頂点のほとんどがその  $\alpha$  連結成分に吸収され, 回路の模倣ができなくなる恐れがある. 次の補題 1 で, そのようなことは, 起こり得ないことを示す.

**補題 1.** (i)  $K$  に含まれる各頂点は,  $K$  中の如何なる (1 頂点からなる) 集合とも  $\alpha$  隣接しない.  
(ii)  $K$  に含まれる各頂点は, 各  $C_l$  部分グラフ中の如何なる頂点集合に対しても  $\alpha$  隣接しない.

**証明.** (i) に対する証明は, 以下に示す (ii) とほとんど同じなので省略する. (ii)  $G$  の各頂点  $v$  に対し,  $v$  の “threshold” を以下のように定義する.

$$\text{thr}(v) = \lceil d(v) \cdot \alpha / m \rceil.$$

ただし,  $m$  は  $G$  の頂点数である. (頂点  $v$  の近傍のうち少なくとも  $\text{thr}(v)$  個の頂点が, ある集合  $S$  に含まれるとき,  $v$  は  $S$  に  $\alpha$  隣接となる.) 如何なる頂点  $v$  に対しても  $d(v) < m$  なので,  $1 \leq \text{thr}(v) \leq \lceil \alpha \rceil$  が成り立つ.  $K$  は, 大きさ  $|9n(\alpha - 1)|$  の完全部分グラフなので,  $K$  の各頂点  $u$  に対し,

$$\begin{aligned} d(u) &\geq |K| - 1 = \lceil 9n(\alpha - 1) \rceil - 1 \\ &\geq 9n(\alpha - 1) - 1 \end{aligned} \quad (1)$$

となる.  $G$  の頂点数  $m$  は,

$$\begin{aligned} m &= |K| + 9n = \lceil 9n(\alpha - 1) \rceil + 9n \\ &\leq 9\alpha n + 1. \end{aligned} \quad (2)$$

を満たす. 式 (1), (2) より,

$$\begin{aligned} d(u) \cdot \alpha / m &\geq \frac{9n(\alpha - 1) - 1}{9\alpha n + 1} \cdot \alpha = \left(1 - \frac{9n + 2}{9\alpha n + 1}\right) \alpha \\ &= \alpha - 1 - \frac{2\alpha - 1}{9\alpha n + 1} > \alpha - 2. \end{aligned}$$

つまり,

$$\begin{aligned} \text{thr}(u) &= \lceil d(u) \cdot \alpha / m \rceil \\ &\geq \lceil \alpha - 1 \rceil. \end{aligned} \quad (3)$$

各  $C_l$  部分グラフは高々  $9\lfloor(\alpha-2)/9\rfloor$  頂点しか含んでいない。(3)より  $u$  が  $\alpha$  隣接する集合の大きさは少なくとも  $\lfloor\alpha-1\rfloor$  である。 $9\lfloor(\alpha-2)/9\rfloor < \lfloor\alpha-1\rfloor$  より、 $u$  は  $C_l$  部分グラフ中の如何なる頂点集合に対しても  $\alpha$  隣接しない。□

$g_i$  頂点  $a_i^1, a_i^2, \dots, c_i^3$  で構成される部分グラフを  $g_i$  部分グラフと呼ぶ。

補題2.  $g_i$  を回路  $C_l$  の出力ゲートとする。このとき、 $g_i$  が1のときに限り、 $b_{i1}^1$  と  $b_{i1}^2$  が同じ  $\alpha$  連結成分に入る。(  $g_i$  が0のときは、 $g_i$  部分グラフは9個の  $\alpha$  連結成分に分かれたままである。 )

証明.  $g_{i1}, g_{i2}, \dots, g_{iq}$  を回路  $C_l$  の値1の入力頂点とする。(  $a_{i1}^1, a_{i1}^2, a_{i1}^3, a_{i2}^1, a_{i2}^2, a_{i2}^3, \dots, a_{iq}^1, a_{iq}^2, a_{iq}^3$  が上記  $q$  個の入力ゲートに対応することに注意、図2-(b)参照)  $a_{i1}^1$  を(最終的に)含んでいる  $\alpha$  連結成分を  $S_l$  で表す。各  $i$  ( $1 \leq i \leq q$ ) に対し、 $a_{i1}^1$  は5近傍を持つ。 $a_{i1}^2$  は  $a_{i1}^1$  の近傍である。[1]と同様  $2 \leq \alpha \leq m^{1/2}$  と仮定したので、

$$\begin{aligned} thr(a_{i1}^1) &= \lceil d(a_{i1}^1) \cdot \alpha / m \rceil \\ &\leq \lceil 5 \cdot \sqrt{m} / m \rceil = 1. \end{aligned}$$

故に、 $a_{i1}^1$  は  $\{a_{i1}^2\}$  と  $\alpha$  隣接し、 $a_{i1}^1$  と  $a_{i2}^2$  は、 $S_l$  に属す。同様にして、 $a_{i1}^1, a_{i1}^2, a_{i1}^3, a_{i2}^1, a_{i2}^2, a_{i2}^3, \dots, a_{iq}^1, a_{iq}^2, a_{iq}^3$  の全ては  $S_l$  に属す。

回路  $C_l$  の各ゲート  $g_i$  に着目する。

(1)  $g_i$  を値1の入力頂点とする(図2-(b)参照)。上記のように、3頂点  $a_i^1, a_i^2, a_i^3$  は  $S_l$  に属す。頂点  $b_i^p$  は  $(18n+2)$  近傍持ち、そのうち3つは  $a_i^1, a_i^2, a_i^3$  である。各  $p \in \{1, 2, 3\}$  に対し、

$$\begin{aligned} thr(b_i^p) &= \lceil d(b_i^p) \cdot \alpha / m \rceil \\ &= \left\lceil \frac{(18n+2) \cdot \alpha}{9\alpha n} \right\rceil = 3 \end{aligned}$$

であることから、頂点  $b_i^p$  は  $S_l$  に属す。同様に  $thr(c_i^p) = 3$  及び  $b_{i1}^1, b_{i2}^2, b_{i3}^3$  が  $S_l$  に属すことから、 $c_{i1}^1, c_{i2}^2, c_{i3}^3$  も  $S_l$  に属す。

(2)  $g_i$  を値0の入力頂点とする(図2-(a)参照)。9個の  $g_i$  頂点  $a_i^1, a_i^2, \dots, c_i^3$  は、 $thr(a_i^1) = thr(a_i^2) = \dots = thr(c_i^3) = 3$  となるように大きな次数  $18n+2$  を持つ。 $g_i$  の出力は、 $g_r$  と  $g_s$  の入力であるとする。このとき、 $g_i$  部分グラフに隣接する頂点は、 $\{a_r^1, a_r^2, a_r^3\}$  または  $\{a_s^1, a_s^2, a_s^3\}$  または  $K$  に含まれる。補題1より、 $K$  の如何なる頂点も  $g_i$  部分グラフに  $\alpha$  隣接しない。各  $g_i$  頂点  $v$  に対して、 $thr(v) = 3$  であることから、 $v$  は  $K$  に含まれる如何なる  $\alpha$  連結成分(全て大きさ1)とも  $\alpha$  隣接しない。上記(1)と以下の(3),(4)で分かるように、如何なる  $i$  ( $1 \leq i \leq n$ ) に対しても、3頂点  $a_i^1, a_i^2, a_i^3$  は、同じ  $\alpha$  連結成分に含まれるか、3個の  $\alpha$  連結成分に分かれる。したがって、ある  $c_i^p$  が  $S_l$  に属してしまうのは、 $a_r^1, a_r^2, a_r^3, a_s^1, a_s^2, a_s^3$  の全てが、 $S_l$  に属す場合に限られる。(3頂点  $a_r^1, a_r^2, a_r^3$  だけが  $S_l$  に属す場合では、如何なる  $c_i^p$  も  $S_l$  に  $\alpha$  隣接しない。なぜなら如何なる  $c_i^p$  も  $\{a_r^1, a_r^2, a_r^3\}$  中の2頂点としか隣接していない。) 上記6頂点が  $S_l$  に属している場合には、 $g_i$  部分グラフの全頂点は  $S_l$  に属してしまうが、それより下位レベルにある出力ゲートには何ら影響を及ぼさない。(各  $g_i$  の出力線数は高々2、及び、出力ゲートの出力線数は0であることに注意。)

(3)  $g_i$  をANDゲートとする( $g_i = g_j \wedge g_k$ , 図1-(a)参照)。9個の  $g_i$  頂点の各次数  $d(a_i^1) = d(a_i^2) = \dots = d(c_i^3) = 18n+2$  より、 $thr(a_i^1) = thr(a_i^2) = \dots = thr(c_i^3) = 3$  となる。(3-a)  $c_j^1, c_j^2, c_j^3$  と

$c_k^1, c_k^2, c_k^3$  が  $S_l$  に属すると仮定する.  $\text{thr}(a_i^1) = \text{thr}(a_i^2) = \text{thr}(a_i^3) = 3$  だから, 3 頂点  $a_i^1, a_i^2, a_i^3$  も  $S_l$  に属し, それ故, 6 頂点  $b_i^1, b_i^2, b_i^3, c_i^1, c_i^2, c_i^3$  も  $S_l$  に属す. (3-b)  $\{c_j^1, c_j^2, c_j^3\}$  と  $\{c_k^1, c_k^2, c_k^3\}$  のいずれか一方が  $S_l$  に属さない場合を考える. いま, 一般性を失うことなく,  $c_j^1, c_j^2, c_j^3$  の全てが  $S_l$  に属しないとす. このとき, たとえ  $c_k^1, c_k^2, c_k^3$  が  $S_l$  に属すとしても, 3 頂点  $a_i^1, a_i^2, a_i^3$  のいずれも  $\{c_k^1, c_k^2, c_k^3\}$  に  $\alpha$  隣接しない. (2) と同様,  $g_i$  の出力は  $g_r$  と  $g_s$  の入力であるとする. (3-a) で示した状況以外で, ある  $c_i^p$  が  $S_l$  に属するのは, 上記 (2) と全く同じ場合である. しかし, (2) と同様に,  $c_i^p$  が  $S_l$  に含まれても, それより下位レベルにある出力ゲートには何ら影響を及ぼさない.

(4)  $g_i$  を OR ゲートとする ( $g_i = g_j \vee g_k$ , 図 1-(b) 参照). (1) と同様に,  $\text{thr}(a_i^1) = \text{thr}(a_i^2) = \text{thr}(a_i^3) = \text{thr}(c_i^1) = \text{thr}(c_i^2) = \text{thr}(c_i^3) = 3$  となる.  $b_i^1$  の次数  $d(b_i^1) = 9n + 1$  より,

$$\begin{aligned} \text{thr}(b_i^1) &= \lceil d(b_i^1) \cdot \alpha / m \rceil \\ &= \left\lceil \frac{(9n+1) \cdot \alpha}{9\alpha n} \right\rceil = 2. \end{aligned}$$

同様に,  $\text{thr}(b_i^2) = \text{thr}(b_i^3) = 2$ . (4-a)  $\{c_j^1, c_j^2, c_j^3\}$  と  $\{c_k^1, c_k^2, c_k^3\}$  のいずれか一方が  $S_l$  に属する場合を考える. いま, 一般性を失うことなく,  $c_j^1, c_j^2, c_j^3$  が  $S_l$  に属すると仮定する.  $a_i^1$  は  $\text{thr}(a_i^1) = 3$  を満たし, かつ  $a_i^1$  の 3 近傍は  $c_j^1, c_j^2, c_j^3$  であることから, 頂点  $a_i^1$  は  $S_l$  に属す. 同様にして,  $a_i^2$  も  $S_l$  に属す.  $b_i^1$  は  $\text{thr}(b_i^1) = 2$  を満たし, かつ  $b_i^1$  の 2 近傍が  $a_i^1$  と  $a_i^2$  であることから, 頂点  $b_i^1$  は  $S_l$  に属す. 同様にして,  $b_i^2, b_i^3$  も  $S_l$  に属し, したがって,  $c_i^1, c_i^2, c_i^3, a_i^3$  も  $S_l$  に属す. (2) と同様,  $g_i$  の出力は  $g_r$  と  $g_s$  の入力であるとする. (4-a) で示した状況以外で, ある  $c_i^p$  が  $S_l$  に含まれるのは, 上記 (2) と全く同じ場合である. しかし, (2) と同様に,  $c_i^p$  が  $S_l$  に含まれても, それより下位レベルにある出力ゲートには何ら影響を及ぼさない.  $\square$

$\alpha$  連結成分は, 値 1 の入力ゲートから始まり, 値が 1 になるときに限って, 下位レベルへ伝搬して行く. 出力ゲートが 1 になるときに限り, 出力ゲートに対応する頂点まで伝搬が伝わる. 補題 1 より, この伝搬は,  $K$  の如何なる頂点にも波及しない.

## 参考文献

- [1] 岩本, 岩間, “並列化が徐々に困難になるグラフ問題について”, 信学技法, COMP 93-39 (1993-09).
- [2] R. Karp and V. Ramachandran, Parallel algorithms for shared-memory machines, in “Handbook of Theoretical Computer Science,” (J. van Leeuwen, ed.), Vol. A, pp. 869-941, MIT Press, Amsterdam (1990).
- [3] R. Karp, E. Upfal, and A. Wigderson, Constructing a perfect matching is in Random NC, *Combinatorica* 6, 1 (1986) 35-48.
- [4] S. Khuller and B. Schieber, Efficient parallel algorithms for testing  $k$ -connectivity and finding disjoint  $s$ - $t$  paths in graphs, *SIAM J. Comput.* 20 2 (1991) 352-375.
- [5] R. Tarjan, Depth-first search and linear graph algorithms, *SIAM J. Comput.* 1 (1972) 146-160.